

maximum principle の^{きほん}基本

1 導入

このページの^{かくしん}核心は、Laplace ^{ほうていしき}方程式や^{ねつほうていしき}熱方程式では、^{ないぶ}内部の^{さいだいち}最大値が^{きょうかい}境界や^{しよきじょうけん}初期条件に^{しはい}支配されることである。

2 用語と定義

maximum principle は、^{だえんがた}楕円型や^{ほうぶつがた}放物型の PDE で、^{かい}解の^{さいだいち}最大値や^{さいしやうち}最小値が^{りやういきないぶ}領域内部で^{じゆう}自由には^{ほっせい}発生しないことを^の述べる^{げんり}原理である。

3 方針

Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ の^{ほうていしき}解は、^{かい}内部に^{ないぶ}源を持たない^{みなもと}平衡状態^もである。そのため、^{へいこうじやうたい}境界より^{きょうかい}大きい^{おお}山や^{やま}小さい^{ちい}谷が^{たに}内部に^{ないぶ}新規に^{しんき}発生^{はっせい}しない。

4 弱最大値原理

^{ゆうかいりやういき}有界領域 Ω で u が^{れんぞく}連続で、^{ないぶ}内部で $\Delta u = 0$ を^み満たすと^{さいだいち}する。このとき u の^{さいしやうち}最大値と^{きょうかい}最小値は^{たっせい}境界 $\partial\Omega$ で^な達成される。これは^{ないぶ}内部に^{きょうかい}境界より^{たか}高い^{やま}山が^{こりつ}孤立して^{しゅつげん}出現^のしないことを^{せいかく}述べる。より^{せい}正確には、 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ で $\Delta u = 0$ なら、

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

である。^{きやうさいだいちげんり}強最大値原理では、^{ないぶ}内部で^{さいだいち}最大値を取る^と非定数解^{ひていすうかい}は^{そんざい}存在^{かたち}しない、という^の形で^の述べる。

5 弱最大値原理の証明の核

^{しょうめい}証明の^{ほっそう}発想は、^{ないぶさいだい}内部最大では^{にかいびぶん}二階微分の^わ和が^{せい}正になれない、という^{じじつ}事実である。まず^{なめ}滑らかな^{かんすう}関数 v が^{ないぶてん}内部点で^{さいだいち}最大値を取るなら、その^{てん}点で^{ふはんていち}Hessian は^ふ負半定値である。したがって

$$\Delta v \leq 0$$

である。

一方、^{いっほう} u が^{ちやうわかんすう}調和関数なら $\Delta u = 0$ であり、この^{じゃくさいだいちげんり}ままでは^{ちやくせつ}弱最大値原理を^{むじゆん}直接に^{せつぞく}矛盾へ^の接続^のしにくい。そこで

$$v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$$

を^{どうにゆう}導入する。^{じげん} n 次元では

$$\Delta v_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$$

である。もし v_ε が内部で最大値を取れば、内部最大の必要条件から $\Delta v_\varepsilon \leq 0$ となり矛盾する。したがって v_ε の最大値は境界で達成される。最後に $\varepsilon \rightarrow 0$ として u の最大値も境界で制御される。この議論は厳密には有界領域、連続性、内部での C^2 正則性を仮定する。定理の強化版では、楕円型作用素の係数条件も確認する。

6 重要性

maximum principle は、解の一意性や安定性の証明に使用される。明示解が得られない場合であっても、解の範囲を制御できる。

7 一意性への応用

同じ境界値を持つ二つの調和関数 u, v があるとすると、 $w = u - v$ とおくと、 $\Delta w = 0$ であり、境界では $w = 0$ である。maximum principle により w の最大値も最小値も 0 であるため、 $w = 0$ 、すなわち $u = v$ である。

8 heat 方程式の場合

熱方程式では、時間区間を含む円柱領域の底面と側面が最大値を支配する。内部で温度が初期値や境界値を超えて自由に増加しないことを意味する。

たとえば $0 < x < L$ で $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, $u(0, t), u(L, t)$ と $u(x, 0)$ がすべて 0 から 100 の範囲に入るなら、内部の温度もその範囲を逸脱しない。新しい熱源が内部にないため、境界と初期状態が範囲を制御する。

9 比較例: 波動方程式

波動方程式では、初期速度により内部の値が後から大きくなることもある。双曲型では最大値の支配より、有限伝播速度とエネルギー保存が中心になる。したがって maximum principle は PDE 全般の性質ではなく、楕円型・放物型に特徴的な原理である。

10 直感図としての説明

Laplace 方程式の解を薄膜の高さとして解釈する。境界を固定し、内部に支柱や力を置かない場合、膜の内部に境界より高い山は形成されない。この図式は厳密証明の代替ではないが、境界支配の直感を与える。

11 どこまで成り立つか

maximum principle は方程式の型と係数の条件に依存する。双曲型の波動方程式では、同じ形式では成立しない。

12 関連リンク

→ [講義](#) [二階線形 PDE の分類](#) [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/二階線形 PDE の分類-講義/>